Identificazione di modelli per le dinamiche verticali di autoveicoli: parte III

Introduzione

Il sistema in Figura 1 rappresenta un modello quarter-car per le dinamiche verticali di un autoveicolo.

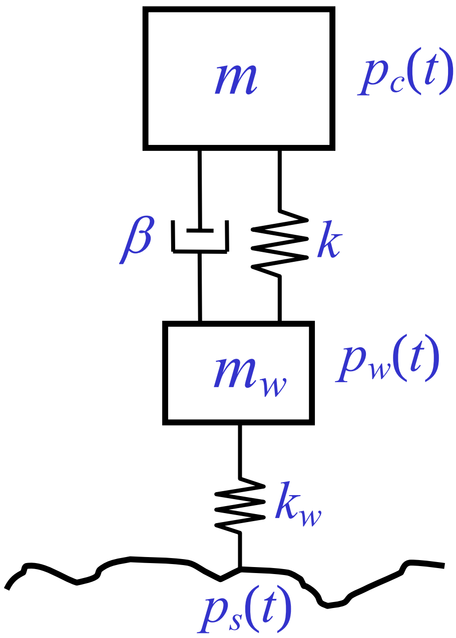

Figura 1

Variabili:
$p_c(t)$ = posizione verticale di ¼ di cassa del veicolo (m)
$p_w(t)$ = posizione verticale della ruota (m)
$p_s(t)$ = altezza del profilo stradale in corrispondenza della ruota (m)

Costanti:
m = massa di ¼ di veicolo (Kg)
m_w = massa della ruota (Kg)
k = costante elastica della sospensione (N/m)
β = coefficiente di attrito viscoso ammortizzatore (N*s/m)
k_w = costante elastica del pneumatico (N/m)

Le equazioni differenziali che descrivono il modello quarter-car sono:

$$\begin{aligned} m\ddot{p}_c &= -\beta(\dot{p}_c - \dot{p}_w) - k(p_c - p_w) \\ m_w\ddot{p}_w &= \beta(\dot{p}_c - \dot{p}_w) + k(p_c - p_w) - k_w(p_w - p_s) \end{aligned}$$

Ponendo $x = [p_c \quad p_w \quad \dot{p}_c \quad \dot{p}_w]^T$, $u = p_s$, $y = p_c$, si ottengono le seguenti equazioni di stato:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_c x(t) + B_c u(t) \\ y(t) &= C_c x(t) \end{aligned} \qquad A_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & \frac{k}{m} & -\frac{\beta}{m} & \frac{\beta}{m} \\ \frac{k}{m_w} & -\frac{k+k_w}{m_w} & \frac{\beta}{m_w} & -\frac{\beta}{m_w} \end{bmatrix}, \quad B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{k_w}{m_w} \end{bmatrix}, \quad C_c = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

Discretizzando questo sistema col metodo di Eulero esplicito, si ha:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) \end{aligned} \qquad A = I + T_s A_c,\ B = T_s B_c,\ C = C_c \tag{1}$$

dove T_s è il tempo di campionamento. La funzione di trasferimento del sistema (1) è data da:

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_1 z + b_2}{z^4 + a_1 z^3 + a_2 z^2 + a_3 z + a_4}$$

dove i coefficienti $a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2$ dipendono dai parametri m, m_w, k, β, k_w, T_s.

Considerando che la variabile complessa z rappresenta l'operatore di traslazione temporale: $z^{-1}y(k)=y(k-1)$, possiamo scrivere il sistema quarter-car in forma di regressione lineare:

$$y(k+1) = -a_1 y(k) - \ldots - a_4 y(k-3) + b_1 u(k-2) + b_2 u(k-3) \tag{2}$$

dove $y(k)=y(kT_s)$ e $k=1,2,\ldots$

Generazione dei dati

(1.1) Definire i coefficienti $a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2$ del sistema (2) su un file Matlab usando i seguenti valori dei parametri: m=1585/4 Kg, m_w=40 Kg, k=17500 N/m, β=2500 N*s/m, k_w=2e5 N/m, T_s=0.005 s. I coefficienti $a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2$ possono essere calcolati numericamente mediante il comando Matlab tfdata applicato al sistema (1). Il sistema (2) con questi valori dei parametri è detto *sistema vero*.

(1.2) Simulare il sistema (2) usando come ingresso il profilo stradale del file profilo_random_005.mat. Corrompere il segnale di uscita ottenuto dalla simulazione con un rumore bianco gaussiano (comando randn) con valor medio nullo e deviazione standard σ=1e-4. Il segnale di uscita corrotto da rumore sia indicato con y_m.
La simulazione può essere eseguita mediante un ciclo for, iterando ad ogni passo del ciclo l'equazione (2).

Identificazione di modelli input-output del II ordine

Si consideri il modello quarter-car semplificato di Figura 2.

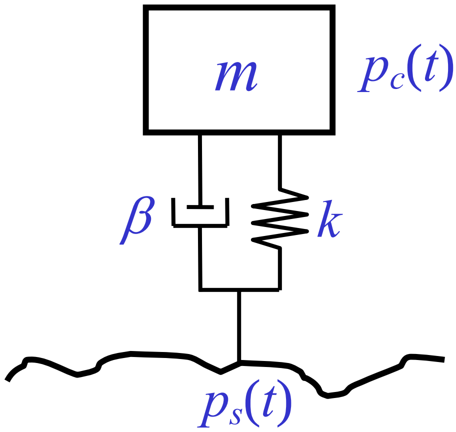

Figura 2

L'equazione differenziale che descrive questo modello è:

$$m\ddot{p}_c = -\beta(\dot{p}_c - \dot{p}_s) - k(p_c - p_s)$$

La funzione di trasferimento tra p_s e p_c è data da:

$$G(s) = \frac{P_c(s)}{P_s(s)} = \frac{\beta s + k}{ms^2 + \beta s + k}$$

Discretizzando $G(s)$ con il metodo di Eulero esplicito (che consiste nell'applicare la trasformazione $s = (z-1)/T_s$), si ottiene:

$$G(z) = \frac{P_c(z)}{P_s(z)} = \frac{b_1 z + b_2}{z^2 + a_1 z + a_2}$$

$$b_1 = \frac{T_s \beta}{m}, \quad b_2 = \frac{T_s^2 k}{m} - \frac{T_s \beta}{m}, \quad a_1 = \frac{T_s \beta}{m} - 2, \quad a_2 = 1 + \frac{T_s^2 k}{m} - \frac{T_s \beta}{m} \tag{3}$$

Il modello quarter-car del II ordine può quindi essere scritto in forma di regressione lineare:

$$y(k+1) = -a_1 y(k) - a_2 y(k-1) + b_1 u(k) + b_2 u(k-1) \tag{4}$$

Il problema è stimare i parametri a_1, a_2, b_1, b_2 .

(2.1) Stima 1:

$$\hat{p}_1 = \left(L^T L\right)^{-1} L^T Y, \quad L = \begin{bmatrix} -y_m(2) & -y_m(1) & u(2) & u(1) \\ -y_m(3) & -y_m(2) & u(3) & u(2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -y_m(N-1) & -y_m(N-2) & u(N-1) & u(N-2) \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} y_m(3) \\ y_m(4) \\ \vdots \\ y_m(N) \end{bmatrix}$$

dove $\hat{p}_1 = \left[\hat{a}_1 \ \hat{a}_2 \ \hat{b}_1 \ \hat{b}_2\right]^T$, N è la lunghezza del segnale y_m. Il sistema (4) con i valori dei parametri ottenuti da questa stima è indicato con M2($\hat{p}_1$).

(2.2) Calcolare la predizione ad un passo del modello M2($\hat{p}_1$) sul profilo stradale random e paragonare graficamente il segnale di uscita ottenuto con y_m. La predizione ad un passo si ottiene dall'equazione (4) usando y_m al posto di y nel secondo membro.

(2.3) Simulare il modello M2($\hat{p}_1$) sul profilo stradale random e paragonare graficamente il segnale di uscita ottenuto con y_m.

(2.4) Dalle prime due equazioni delle (3) si ha:

$$\beta = \frac{b_1 m}{T_s}, \quad k = \frac{(b_1 + b_2)m}{T_s^2} \tag{5}$$

Supponendo di conoscere il valore esatto di m e usando i parametri stimati $\left[\hat{a}_1 \ \hat{a}_2 \ \hat{b}_1 \ \hat{b}_2\right]^T = \hat{p}_1$, ricavare i valori stimati di β, k dalle equazioni (5).

(2.5) Dalla terza e quarta equazione delle (3) si ha:

$$\beta = \frac{(a_1 + 2)m}{T_s}, \quad k = \frac{(a_1 + a_2 + 1)m}{T_s^2} \tag{6}$$

Supponendo di conoscere il valore esatto di m e usando i parametri stimati $\left[\hat{a}_1 \ \hat{a}_2 \ \hat{b}_1 \ \hat{b}_2\right]^T = \hat{p}_1$, ricavare i valori stimati di β, k dalle equazioni (6).

(2.6) Se il sistema che ha generato i dati fosse quello di Figura 2 e i valori di a_1, a_2, b_1, b_2 fossero quelli veri, i valori di β, k forniti dalla (5) sarebbero esatti e uguali a quelli forniti dalla (6). Nel caso di errori di modello e/o nei parametri, le stime date dalla (5) sono in generale diverse da quelle date dalla (6). In questo caso, β, k possono essere stimati dalle (3) mediante i minimi quadrati:

$$\left[\hat{\beta} \ \hat{k}\right]^T = \left(L^T L\right)^{-1} L^T Y, \quad L = \begin{bmatrix} T_s / m & 0 \\ -T_s / m & T_s^2 / m \\ T_s / m & 0 \\ -T_s / m & T_s^2 / m \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ a_1 + 2 \\ a_2 - 1 \end{bmatrix} \tag{7}$$

(2.7) Stima 2:

M = arx([y_m u],[na nb nk]);
[num1,den1] = tfdata(M,'v');
$\hat{p}_2$ = [den1(2:end) num1(end-1:end)];

dove na,nb,nk dipendono dalla struttura del modello (4) (vedere help comando arx). In questo caso: na=2, nb=2, nk=1.
Il sistema (4) con i valori dei parametri ottenuti da questa stima è indicato con M2($\hat{p}_2$).

(2.8) Simulare il modello M2($\hat{p}_2$) sul profilo stradale random e paragonare graficamente il segnale di uscita ottenuto con quelli del punto (2.3).

(2.9) <u>Stima 3:</u>

M = oe([y_m u],[nb nf nk]);
[num1,den1] = tfdata(M,'v');
$\hat{p}_3$ = [den1(2:end) num1(end-1:end)];

dove nf,nb,nk dipendono dalla struttura del modello (4) (vedere help comando oe). In questo caso: nf=2, nb=2, nk=1.
Il sistema (4) con i valori dei parametri ottenuti da questa stima è indicato con M2($\hat{p}_3$).

(2.10) Simulare il modello M2($\hat{p}_3$) sul profilo stradale random e paragonare graficamente il segnale di uscita ottenuto con quelli dei punti (2.3),(2.8).

(2.11) Ripetere i passi (2.4)-(2.6) usando il vettore di parametri $\hat{p}_3$.

Metodo Montecarlo per la valutazione della varianza dei parametri stimati

(3.1) Stimare la varianza del rumore che ha agito nella generazione dei dati y_m come σ^2 =var(y_m- y_s), dove y_s è l'uscita del modello M2($\hat{p}_3$) simulata usando il profilo random e rumore nullo.

(3.2) Generare N_s=100 simulazioni del sistema M2($\hat{p}_3$) sul profilo random (implementare un ciclo for l=1: N_s). Alla l-esima simulazione:

- Corrompere l'uscita simulata con un rumore di valor medio nullo e deviazione standard σ (comando randn). Il segnale di rumore deve essere diverso per ogni simulazione (comando randn('seed',l)). Sia y_{ml} il segnale di uscita corrotto da rumore della l-esima simulazione.

- Identificare i parametri a_1, a_2, b_1, b_2 dai dati (u,y_{ml}), considerando la stessa struttura e lo stesso metodo impiegati per identificare M2($\hat{p}_3$).

- Memorizzare i valori identificati dei parametri in una matrice P (ogni riga di P deve contenere i parametri identificati nella l-esima simulazione).

(3.3) Stimare media e varianza dei parametri identificati come: mean(P,1), var(P).

(3.4) Per ogni parametro generare un istogramma con la distribuzione delle stime (comando hist(P(:,r)), r=1,2,…,np, np = numero di parametri).

(3.5) Ripetere i passi (3.1)-(3.4) usando i modelli M2($\hat{p}_1$).